Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points A(-3 , 0 , 0) B(0 , 0 , -3) ; C(0 , 2 , -2) et la sphère (S) de centre Ω(1 , 1 , 1) et de rayon est R = 2

0,25 1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}$ et en déduire que : $2x - y + 2z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,75 b) Calculer d(Ω , (ABC)) et en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

2) Soit (D) la droite passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC)

0,5 a) Montrer que : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (D)

0,5 b) Montrer que le triplet de coordonnées du point de tangence H de la sphère (S) et le plan (ABC) est (-1 , 2 , -1)

Exercice 2 (3 points) :

1) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ le points A , B et C d'affixes respectives $a = 2 - i$, $b = 6 - 7i$ et $c = 8 + 3i$

0,75 a) Montrer que : $\frac{c-a}{b-a} = i$

0,75 b) En déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

2) Soient z et z' les affixes respectives d'un point M et de son image M' par la rotation R de centre le milieu Ω de segment [BC] et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

0,5 a) Vérifier que l'affixe du point Ω est $\omega = 7 - 2i$

0,75 b) Montrer que : $z' = -iz + 9 + 5i$

0,25 c) Montrer que le point C est l'image du point A par la rotation R

Exercice 3 (3 points) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4u_n+3}{3u_n+4}$

0,5 1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$

2) On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

0,5 a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - v_n = \frac{2}{u_n+1}$, puis en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - v_n > 0$

0,5 b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$

1 3) a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{7}$, puis écrire v_n en fonction de n

0,5 b) Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, puis en déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 4 (3 points) :

Une urne contient 5 boules rouges, 4 boules blanches et 3 boules vertes (indiscernables au toucher)
On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne

1 — 1) Montrer que la probabilité d'obtenir 3 boules rouges est $\frac{1}{22}$

1 — 2) Montrer que la probabilité d'obtenir 3 boules de même couleur est $\frac{3}{44}$

1 — 3) Montrer que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est $\frac{37}{44}$

Exercice 5 (8 points) :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et on désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'unité graphique 1 cm

0,75 — 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ et en déduire que le point O est un centre de symétrie de la courbe (C_f)

0,6 — 2) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$
Il vaut mieux utiliser cette expression pour résoudre les questions qui suivent

1,25 — 3) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ et vérifier que : $f'(0) = \frac{3}{2}$

0,5 — b) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$

0,5 — c) Montrer que : $y = \frac{3}{2}x$ est une équation de la droite tangente (T) à la courbe (C_f) au point O

0,5 — 4) a) Montrer que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

0,5 — b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x + 1)$ et en déduire que la droite (D) d'équation : $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$

0,5 — c) Montrer que la courbe (C_f) est en dessous de la droite (D)

1,5 — 5) Tracer les droites (D), (T) et la courbe (C_f) (on rappelle que O est un centre de symétrie de (C_f))

0,75 — 6) a) Montrer que : $x \mapsto x - \ln(e^x + 1)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$

0,5 — b) En déduire que : $\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{e^x + 1}\, dx = \ln(4) - \ln(3)$

0,5 — c) Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(2)$